Γραμμική Άλγεβρα 1 - Τεστ Νο 7

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1 (20 Μόρια)
Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις ως Αληθή ή Ψευδή, με πλήρη αιτιολόγηση.

(i) Αν X είναι ένας $\mathbb{R}-$ γραμμικός χώρος και V ένας υπόχωρος του X, τότε το συμπλήρωμα $X \setminus V$ του V είναι υπόχωρος του X.

(ii) Οι συντεταγμένες του $(1,2,3)$ ως προς τη βάση $S = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι $1,2$ και 3.

(iii) Ο υπόχωρος των 2×2 αντισυμμετρικών πινάκων $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ έχει διάσταση 2

(iv) Αν τα πολυώνυμα $P_1(x), P_2(x)$ και $P_3(x)$ έχουν κοινή ρίζα, τότε το σύνολο $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ δεν είναι βάση του $\mathbb{R}_2[x]$.

Θέμα 2 (30 Μόρια)
Στον ευκλείδειο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τους υποχώρους

$$V = \langle (1,2,1),(2,2,-2),(1,3,3) \rangle$$

και

$$W = \langle (1,2,2),(2,2,-6),(2,3,-1) \rangle$$

(i) Να προσδιορίσετε μια βάση για τους υποχώρους $V, W, V \cap W, V + W$.

(ii) Να επεκτείνετε τις βάσεις των V, W σε βάσεις του $\mathbb{R}^3$.

(iii) Να βρεθούν υπόχωροι V' και W' για τους οποίους $V \oplus V' = \mathbb{R}^3$ και $W \oplus W' = \mathbb{R}^3$.

(iv) Να εξετάσετε αν το άθροισμα $V + W$ είναι ευθύ.

Θέμα 3 (30 Μόρια)
Θεωρούμε τον $\mathbb{R}-$ διανυσματικό υπόχωρο

$$V = \langle 2ax^2 - ax + 1, -9x^2 + 2x - 5, 3x^2 + x - 1 \rangle$$

του $\mathbb{R}_2[x]$.

(i) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτου $a \in \mathbb{R}$, να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του V.

(ii) Εξετάστε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $V = \mathbb{R}_2[x]$.

(iii) Να προσδιορίσετε έναν υπόχωρο W του $\mathbb{R}_2[x]$ τέτοιο ώστε $R_2[x] = V \oplus W$.

Θέμα 4 (20 Μόρια)
Στον ευκλείδειο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$ θεωρούμε τον υπόχωρο

$$V = \{(x,y,z,w) : x + y + 2z + w = 0\}.$$

Να βρεθεί ένας υπόχωρος W του $\mathbb{R}^4$ τέτοιος ώστε $V \cap W = \langle (0,-3,1,1) \rangle$ και $V + W = \mathbb{R}^4$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ